TITLE:

非線形常微分方程式の特異点(微分方程式の数式処理システムの研究)

AUTHOR(S):

村田, 嘉弘

CITATION:

村田, 嘉弘. 非線形常微分方程式の特異点(微分方程式の数式処理システムの研究). 数理解析研究所講究録 1989, 681: 27-53

ISSUE DATE:

1989-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/101152

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
681巻 1989年 27-53

非線形常微分方程式の特異点

東大・理　村田嘉弘　(Yoshihiro Murata)

§0. はじめに

まず，次の方程式を考えてみよう。

(E1)
$$y'' = -\frac{(y')^2}{y} + \frac{y'}{x} - \frac{y}{2x^2}$$

この方程式は，実は求積できて，一般解は

$$y = \sqrt{x(A + B\log x)} \qquad (A, B) \neq (0, 0)$$

である。よって，(E1)の解の特異点は次のように分類される。

位置		種類
$x = 0$	解に依らない（動かない）	超越的
$x = e^{-\frac{A}{B}}$	解に依る（動く）	代数的

この例でもわかるように，非線形の場合は，線形のときと異なり，方程式の形からは予測できない位置に解の特異点が現れ，しかもそれがあちこち動きまわるという現象が起きる

ことがある。

そこで，非線形方程式の解について調べようとすると，まず次のような問題に行き当たる。

問題 1　<u>任意に非線形方程式が与えられたとき，解の特異点について，位置・種類・性質を定性的に調べよ。</u>

この問題にある程度の解答を与えることができれば，更に次の問題へと導かれる。

問題 2　<u>非線形方程式が動く（代数的・超越的）特異点を持たないための必要十分条件を求めよ。</u>

よく知られているように，これらの問題は L. Fuchs, E. Picard, P. Painlevé 等19世紀末の数学者達により取り上げられ，その後，J. Malmquist を経て，日本の福原，木村，松田の諸先生方へと受け継がれた。本稿では，特に 問題1 に話題を絞り，歴史（§1）を振り返った後，筆者により得られた最近の結果（§2, §3）を紹介することにする。「数式処理システム」に関係のない話題ばかりで申し訳ないが，最後の方（§4）で，この方面の研究への数式処理システムの応用法，また，筆者の期待等をいくつか列挙して御勘弁願うことにしたい。また，問題2 と関連し，本論を補うものとして，論説[8]があるので，興味を持たれた方はそちらも合せて読んでみてほしい。

§1. 歴史

1° 「動かない特異点」, 「動く特異点」はどう定義すべきか?

Painlevé によるガイドライン

§0では, 「動かない特異点(不動特異点)」, 「動く特異点」と, 取り立てて定義もせず述べていたが, ここで, これらの概念を少し考察してみよう。

> $x = \xi \in \mathbb{C}$ として,
>
> $x = \xi$ が解に依らない(動かない)特異点
>
> $\fallingdotseq$ $x = \xi$ で, 一般解が特異点を持つ
>
> $\fallingdotseq$ 方程式の形による制限のために, $x = \xi$ で一般解が特異点を持つ
>
> $x = \xi$ が解に依る(動く)特異点
>
> $\fallingdotseq$ $x = \xi$ で特異点を持つのは特定の解 (k-parameter family であることもある) だけ

だいたいこのように考えるのが妥当だろうが, いくつか問題もある。

① —— の所に対応することだが, 方程式の形から予測できる点で一般解が特異点を持つこともあれば, 持たないこともある。例えば,

(E2) $$y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{x}$$

一般解：$y = Ax^B$ （$B \notin \mathbb{Z}$ ならば，$x=0$ は特異点）

(E3) $$y'' = -\frac{(y')^2}{y} + \frac{y'}{x}$$

一般解：$y = \sqrt{Ax^2+B}$ （$x=0$ は特異点ではない）

② 〰〰〰 の所を示すことは結構難しい。

このような事情を勘案して，不動特異点集合 Θ，動く特異点 $x=a$ をどのように定義すべきかそのガイドラインを定めたのが Painlevé だった。彼は次のように考えた。

> Θ：方程式の形から定まる，解が特異点を持ちうる点の集合で，方程式の定義域で discrete であるもの。$\xi \in \Theta$ のとき，$x=\xi$ を動かない特異点と呼ぶ。
>
> $x=a$ が動く特異点である
>
> $\Longleftrightarrow$ $a \notin \Theta$ であり，$x=a$ 上ある解が特異点を持つ。

これが通常我々の理解している「動かない特異点」，「動く特異点」の定義（のガイドライン）である。このようなガイドラインのもと，特異点の定性的理論がどのように建設されたかを次で見てみよう。

2° Painlevéから福原, 木村, 松田まで

まず, 本論を通して使う記号を次に挙げておこう.

[記号]

$D \subset \mathbb{C}$ ： 領域

$\mathcal{O}_D$ ： D 上の正則函数（独立変数は x）全体のなす環

$\mathcal{O}_D[y_1, \cdots, y_n]$ ： $\mathcal{O}_D$ 係数の多項式環

$P, Q \in \mathcal{O}_D[y_1, \cdots, y_n]$ のとき

$$(P, Q) = 1 \iff P, Q \text{ は互いに素}$$

(注) $\mathcal{O}_D[y_1, \cdots, y_n]$ は一意分解整域 (UFD) ではなく, 弱一意分解整域 (w-UFD) である。$(P, Q) = 1$ とはこの素元分解のもとで考えていることに注意する ([6] の 1.2, Appendix を参照)。

《1階単独方程式の場合》

$$(E_1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

$$P, Q \in \mathcal{O}_D[y], \quad (P, Q) = 1$$

に対し, $y = \frac{1}{v}$ で方程式を書き直すと

$$(E_1)_2 \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{P_2(x, v)}{Q_2(x, v)}$$

$$P_2, Q_2 \in \mathcal{O}_D[v], \quad (P_2, Q_2) = 1$$

ただし, $(E_1)_2$ は y の値が ∞ となるときを調べるために使う方程式である。このとき, 不動特異点集合 Θ を次で定める.

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$$

$$\Theta_1 = \{\xi \in D \mid Q(\xi, y) \equiv 0\}$$

$$\Theta_2 = \{\xi \in D - \Theta_1 \mid {}^{\exists}\eta \in \mathbb{C} \quad \text{s.t. } P(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta) = 0\}$$

$$\cup \{\xi \in D - \Theta_1 \mid P_2(\xi, \infty) = Q_2(\xi, \infty) = 0\}$$

(Θ_i $(i=1, 2)$ を第 i 種不動特異点という。)

Φ を (E_1) の解とすると，次の定理が成り立つ。

$\boxed{\text{定理}\ \alpha\ (\text{Painlevé [9]})}$

(1) Φ が $a \in D - \Theta$ 上特異点 ω を持てば，ω は代数的特異点である。(i.e. 動く特異点は代数的特異点である)

(2) Φ が $\xi \in \Theta_2$ 上超越特異点 ω を持てば，ω は通性超越特異点である。▨

この定理より，Φ が $x = \xi \in D$ 上真性特異点を持てば，$\xi \in \Theta_1$ であることがわかる。

$\boxed{\text{定理}\ \beta\ (\text{T. Kimura [2]})}$

$\mathcal{R}$ を Φ の Riemann 面とする。Φ が $\xi \in \Theta_1$ 上真性超越特異点 ω を持ち，ω での集積値集合が $S_\omega \subset \mathbb{P}$ であるとする。このとき，

(1) $S_\omega = \mathbb{P}$

(2) (Picard 型の性質) Φ は ω の任意の近傍 $\mathcal{U}$ で，$\mathbb{C} - \{\eta \in \mathbb{C} \mid P(\xi, \eta) = 0\}$ のすべての値をとる。▨

この他，Φ の真性特異点 ω については，Briot - Bouquet，Painlevé，Malmquist，福原，木村，松田により極めて深い結果が得られているが，紙幅のこともあり，ここではそれを一切割愛させて頂く（［1］を参照）。

《２階単独方程式の場合》

$$(F_2) \qquad \frac{d^2y}{d^2x} = \frac{P(x, y, \frac{dy}{dx})}{Q(x, y, \frac{dy}{dx})}$$

$$P, Q \in \mathcal{O}_D[y, \frac{dy}{dx}], \quad (P, Q) = 1$$

(F_2) に対して不動特異点集合 Θ を定義するのは少々難しい。Painlevé は［9］の第18講で Θ を定義しているが，1階単独の場合に比べ，あいまいである。Θ を厳密に定義したのは，Kimura［3］であった。

また，次の例が示すように，(F_2) では動く超越特異点が存在することがある。

$$(E4) \qquad y'' = \frac{(1-i)\,i\,(y')^2}{y}$$

$$一般解：\ y = A(x-B)^i \qquad (x = B は真性特異点)$$

よって，1階単独での定理 α の(1)に当たるものは成り立たない。その代り，動く真性特異点が存在しないための十分条件については［3］の中で論じられている。定理 α (2) に対応

することは，Painlevé が［9］の第18講でいろいろ調べている．しかし，あまり明快ではない。定理βに対応して，ある条件の下で動く真性特異点に対してPicard型の定理の成り立つことは［3］の中で示されている。

以上のような具合であるから，動かない真性特異点についての研究は，岩野，高野，下村，吉田の諸先生諸氏による近年の成果を除けば，まだ十分とは言い難い

《3階以上の単独方程式・連立系の場合》

Painlevé が［9］の第18講の中で調べているが，Ⓐの定義にしても，定理α，βに対応する結果にしても不完全である。

§2. n 連立系の特異点についての定性的理論

§1，2°で見たように満足すべき結果が得られているのは，1階単独の場合だけである。他の方程式ではⒶの定義すら不明確であった。実はこれは，1階単独，2階単独，…とか，2連立，3連立，…とか階数の低い方から考えていこうとしたからで，むしろ，始めから一般の n 連立方程式を扱った方が見通しがよく，議論は極めて容易になる。実際，［6］，［7］の中で示したように次のことが言えるのである．

$$(E_n)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{P_1(x, y_1, \cdots, y_n)}{Q_1(x, y_1, \cdots, y_n)} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \dfrac{P_n(x, y_1, \cdots, y_n)}{Q_n(x, y_1, \cdots, y_n)} \end{cases}$$

$$P_\ell, Q_\ell \in \mathcal{O}_D[y_1, \cdots, y_n],\ (P_\ell, Q_\ell) = 1\ (\ell = 1, \cdots, n)$$

に対して，自然に不動特異点集合

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \cdots \cup \Theta_n$$

（Θ_iは第i種不動特異点集合）

を定めることができる。

また，定理α，βの自然な一般化が成り立つ。

尚，n階単独方程式は適当にn連立化して考えるものとする（[6] §4参照）

この節では以下，この結果の解説をしよう。

1° n項解析函数の特異点

(E_n)の解 $\Phi = (y_1, \cdots, y_n)$はn個の解析函数の組からなるが，こういうベクトル値の解析函数は通常の単独の解析函数と若干異なる所がある。まず，n項解析函数の定義をしよう。

定義1　$a \in D$での主要部有限な収束Puiseux級数のn

個の組 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ を D 上解析接続してできる解析函数を n 項解析函数といい，Φ とかく．またその Riemann 面を $\mathcal{R}$ とかく。Φ の取る値は $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ の各成分が $x=a$ 上極を持たないとき，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "\hat{\Phi}_0"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}^n, \\ D & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(a) \in \mathbb{C}^n \\ a & \end{tikzcd}$$

で定める．▨

上の定義で，Φ の取る値が ∞ になるときをうまく処理するために，$\mathbb{C}^n$ に無限遠点を付け加えよう。

$\boxed{\text{定義2}}$ n 次元コンパクト多様体 M が $\mathbb{C}^n$ の有理的コンパクト化であるとは，M が次の条件を満たすことである。

1 $\exists A \subset M$ 解析的集合 s.t. $M - A \cong \mathbb{C}^n$

2 $\exists M$ 上の atlas $\{(U_i, \kappa_i)\}_{i=1}^m$ s.t.

(1) $U_1 = M - A = \mathbb{C}^n$, $\kappa_1 = id : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

(2) $\kappa_j \circ \kappa_i^{-1} : (y^i) \longrightarrow (y^j)$, $y^j_k = R^{ij}_k(y^i) \in \mathbb{C}(y^i)$

(i.e. R^{ij}_k は y^i の有理式) ▨

有理的コンパクト化は具体的には次のようになる．

$n = 1$ のとき　$M = \mathbb{P}^1$

$n=2$ のとき　M は有理曲面となる([4],[5])

$n \geqq 3$ のとき　$\mathbb{P}^n$, $\underbrace{\mathbb{P}\times\cdots\times\mathbb{P}}_{n}$ 等．完全には決定されていない。

(注1) 上の定義で条件2をはずしたものは，「$\mathbb{C}^n$ のコンパクト化M」の定義になる。

(注2) 条件2で，$K_i(U_i)$ は $\mathbb{C}^n$ の通常の位相での単なる開集合とだけ仮定している．

$\mathbb{C}^n$の有理的コンパクト化を1つ取ると，定義1の $\hat{\Phi}$ は正則写像 $\hat{\Phi}$ に自然に拡張される([6], 1.1, 2° 参照).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "\hat{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & M \\ D & \end{tikzcd}$$

従って，次のような immersion $\pi\times\hat{\Phi}$ ができる。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "\pi\times\hat{\Phi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & D\times M \arrow[d, "pr"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & D \end{tikzcd}$$

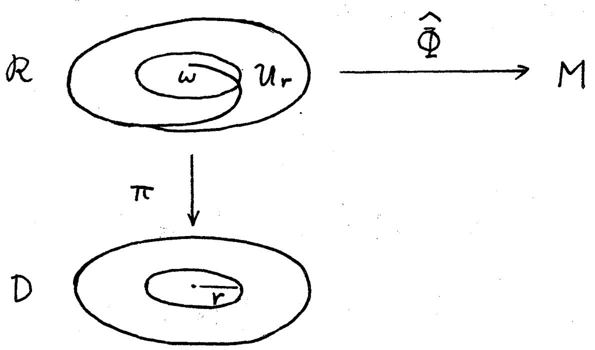
$\pi\times\hat{\Phi}$ (または $(\pi\times\hat{\Phi})(\mathcal{R})$) が前述の方程式 (E_n) の解曲線となる。

次に Φ の特異点 w での集積値集合 $S_w \subset M$ を定義しよう。

$\boxed{\text{定義3}}$　Φ が特異点 ω を持つとき

$$S_\omega = \bigcap_{r>0} \overline{\hat{\Phi}(\mathcal{U}_r)} \subset M$$

を ω での（M に於ての）集積値集合という。ただし、$\mathcal{U}_r$ は ω の r 近傍で、— は M の中での閉包を意味する。



また超越特異点 ω において

$S_\omega = \{1点\}$ のとき、ω は（M に於て）通性超越特異点

$S_\omega =$ 無限集合 のとき、ω は（M に於て）真性超越特異点

であるという。▨

[6], 1.1, 4° の中で示しているように、S_ω は M の取り方により変り、$n \geqq 2$ のときは、通性・真性という概念が a priori な意味を持たないことに注意する。

2°　(E_n) の定義多様体 X

$\mathbb{C}^n$ の有理的コンパクト化 M を1つ固定する。$X = D \times M$ の

atlas $\{(\mathcal{U}_i, \theta_i)\}_{i=1}^{m}$ を次のように取ろう。

1　$\mathcal{U}_i = D \times U_i$,　$\theta_i = id \times K_i$

2　$\theta_j \cdot \theta_i^{-1} = id \times (K_j \cdot K_i^{-1}) : (x\ y^i) \longrightarrow (x,\ y^j)$

n 連立方程式 (E_n) は今後，ファイバー空間 $\mathcal{F} = (X, pr, D)$ の全空間 X の chart $\theta_1(\mathcal{U}_1) = D \times \mathbb{C}^n$ 上の方程式と考えることにしよう。$\mathcal{F}$ を (E_n) の定義空間，X を (E_n) の定義多様体という。また，座標変換 $\theta_j \cdot \theta_i^{-1}$ により (E_n) と compatible な $\theta_i(\mathcal{U}_i)$ 上の方程式

$$
(E_n)_i \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{dy_1^i}{dx} = \dfrac{P_1^i(x,\ y^i)}{Q_1^i(x,\ y^i)} = \dfrac{Y_1^i(x,\ y^i)}{X^i(x,\ y^i)} \\
\qquad\vdots \\
\dfrac{dy_n^i}{dx} = \dfrac{P_n^i(x,\ y^i)}{Q_n^i(x,\ y^i)} = \dfrac{Y_n^i(x,\ y^i)}{X^i(x,\ y^i)}
\end{array}
\right.
$$

を作っておく。ただし，X^i, Y_1^i, …, Y_n^i は互いに素とする。

3° 不動特異点集合 Θ の定義

$(E_n)_i$ に対して，autonomous system

$$
(A_n)_i \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{dx}{dt^i} = X^i \\
\dfrac{dy_1^i}{dt^i} = Y_1^i \\
\qquad\vdots
\end{array}
\right.
$$

$$\begin{cases} \quad \vdots \\ \dfrac{dy_n^i}{dt^i} = Y_n^i \end{cases}$$

を考える。

$\boxed{\text{定義 4}}$ $pr_i : \theta_i(\mathcal{U}_i) = D \times K_i(U_i) \longrightarrow D$, $(a, \mathbf{b}) \to a$ とする.

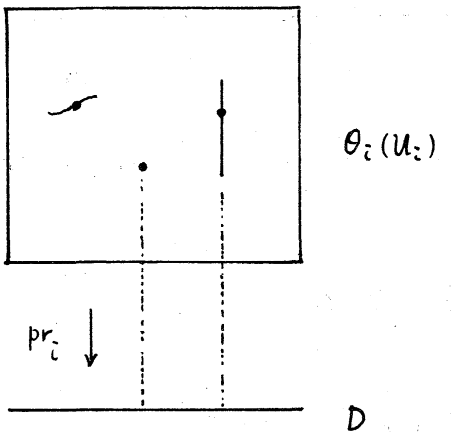
$$\mathcal{S}_i = \{ (a, \mathbf{b}) \in \theta_i(\mathcal{U}_i) \mid (A_n)_i \text{ の } {}^{\exists}\text{解 } (x, \phi)(t^i) \ (t^i \in \Delta \subset \mathbb{C})$$

$$\text{s.t.} \ (x, \phi) \text{ は } (a, \mathbf{b}) \text{ を通り,}$$

$$pr_i(\{(x, \phi)(t^i) \mid t^i \in \Delta\}) = \{a\} \},$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \theta_i^{-1}(\mathcal{S}_i) \subset X = D \times M$$

とおき, $\mathcal{S}$ を X に於ける (E_n) の特異初期点集合 (singular initial set) と呼ぶ。



∎

$\boxed{\text{命題 1}}$ $\mathcal{S}$ は X の解析的集合である。∎

よって, $\mathcal{S}$ を次のように既約分解しよう。

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\sigma \in \Lambda_1} \mathcal{S}_\sigma^{(1)} \cup \cdots \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_k} \mathcal{S}_\sigma^{(k)} \cup \cdots \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_{n+1}} \mathcal{S}_\sigma^{(n+1)}$$

$\mathrm{codim}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{S}_\sigma^{(k)} = k$, $\{\mathcal{S}_\sigma^{(k)}\}$ は locally finite

容易にわかるように,

$\boxed{\text{命題 2}}$ $^\forall \mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ に対し, $pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = \{1\text{点}\}$ または D である. ▨

そこで, 次のような定義が可能である.

$\boxed{\text{定義 5}}$ $pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = \{1\text{点}\}$ のとき, $\mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ を第 k 種の垂直特異点集合 (vertical singularity set) といい, $pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = D$ のとき, $\mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ を第 k 種の被覆特異点集合 (covering singularity set) という。▨

$\mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ の具体的形状については, 例えば, §3 の定理 4 の図を参照してもらいたい。

$\boxed{\text{定義 6}}$ $\Theta_1 = \{\zeta \in D \mid {}^\exists \text{垂直特異点集合}\ \mathcal{S}_\sigma^{(k)}\ \text{s.t.}\ pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = \{\zeta\}\}$

$\Theta_k = \{\zeta \in D - \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_{k-1} \mid {}^\exists \text{垂直特異点集合}\ \mathcal{S}_\sigma^{(k)}$

$\text{s.t.}\ pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = \{\zeta\}\}$ $(k = 2, \ldots, n)$

$\Theta = \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_{n+1}$

とおき, Θ_k を第 k 種の不動特異点集合, Θ を不動特異点集合と呼ぶ。また, Θ_k の元を第 k 種の不動特異点, Θ の元

を不動特異点と呼ぶ。▨

(注) (E_n) の解は定義多様体 X の取り方に依らず，決った位置に決った種類（代数的か超越的か）の特異点を持つが，$\mathcal{S}$，従って，Θ は X の取り方に依存する。

不動特異点集合 Θ と被覆特異点集合は次のようなよい性質を持つ。

|命題3| Θ は D の中で discrete である。▨

|命題4| 被覆特異点集合は有限個である。▨

以上述べてきた定義4～命題4について，詳しいことは［6］の §1，1.3，1.4 を参照してほしい。

容易に分るように，(E_1) の場合，上の定義6による Θ と Painlevé の定義による Θ とは同一の集合である（［6］§2）。また，2階単独方程式の場合は，連立化し，$\mathbb{C}^2$ の有理的コンパクト化として Hirzebruch 曲面 $\Sigma^{(2)}$ を取れば，定義4による $\mathcal{S}$ と木村［3］による特異点集合は同一になる。よって特に，Θ は同一になり，$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ となる（Θ_3 が生じない）。（詳しくは［6］§4 参照）

4° 定理 α，β の一般化

[A] 定理αの一般化（[6] §1, 1.5 参照）

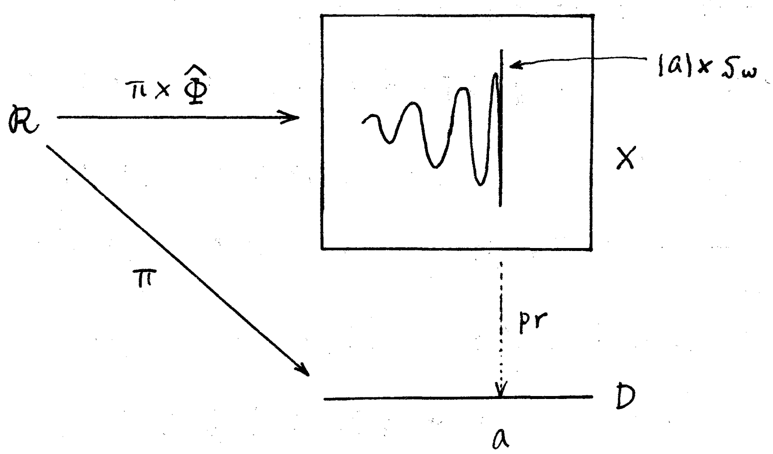
次の定理1は以下に続く定理の依り所となっている。

$\boxed{\text{定理1（基本定理）}}$

Φを(E_n)の一般解とする。Φが$a\in D$上特異点ωを持ち，ωでの集積値集合が$S_\omega\subset M$であるとする。また，$\mathcal{S}_a=pr^{-1}(a)\cap\mathcal{S}$とおく。

(1) $\{a\}\times S_\omega$が点$P\in X-\mathcal{S}$を含めば，$\{a\}\times S_\omega=\{P\}$であり，$\omega$は代数的特異点である。

(2) ωが超越的特異点ならば，$\{a\}\times S_\omega\subset\mathcal{S}_a$である。



▨

$\boxed{\text{系（被覆特異点集合の役割）}}$

(E_n)の解の ℓ-parameter family $\Phi(x;C)$ $(C=(c_1,\cdots,c_\ell))$が$x=a(C)\in D-\Theta$上超越特異点$\omega(C)$を持ち，集積値集合が$S_\omega(C)$であるとすれば，集合$\{a(C)\}\times S_\omega(C)$は被覆特異点集合の中を動く。▨

この系は，言わば，「被覆特異点集合は動く超越特異点の通り道である」ことを述べているのである。

定理2（定理αの一般化）

Φ を (E_n) の解とする。

(1) (E_n) が被覆特異点集合を持たないとする。

Φ が $a \in D - \Theta$ 上特異点 ω を持つ $\Rightarrow$ ω は代数的特異点

Φ が $\xi \in \Theta_{n+1}$ 上特異点 ω を持つ $\Rightarrow$ ω は代数的または通性超越特異点

（よって，Φ が $\xi \in \Theta$ 上真性特異点を持つ $\Rightarrow$ $\xi \in \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_n$）

(2) (E_n) が第1～第$(n-1)$種被覆特異点集合を持たないとする。

Φ が $a \in D - \Theta$ 上または $\xi \in \Theta_{n+1}$ 上特異点 ω を持つ
$\Rightarrow$ ω は代数的または通性超越特異点

（よって，Φ が $\xi \in \Theta$ 上真性特異点を持つ $\Rightarrow$ $\xi \in \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_n$）

(3) (E_n) が第1～第$(n-1)$種の被覆特異点集合を持つとき，Φ は $a \in D - \Theta$ 上真性特異点を持ちうる。▨

(E_1) はどんな場合も被覆特異点集合を持たない。よって上の定理の(1)の仮定が満たされる。そこで，$n=1$ として(1)を読むと，これは取りも直さず (E_1) に対する定理αである。つまり，確かに定理2は定理αの一般化である。

[B] 定理βの一般化 ([7], 1, 3° 参照)

$\boxed{\text{補題}}$ 次の2条件を仮定する。

(C1) (E_n) は第1〜第$(n-2)$種の被覆特異点集合を持たない。

(C2) $a \in D - \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_{n-1}$

($i.e.$ $a \in D - \Theta$ または $a \in \Theta_n \cup \Theta_{n+1}$)

すると、解析的集合 $\mathcal{S}_a = \{a\} \times M \cap \mathcal{S}$ は

$$\mathcal{S}_a = \bigcup_{\tau \in \Lambda_0} \{P_\tau\} \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_1} \{\bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)}\} \subset D \times M$$

と既約分解される。ただし、$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_\sigma$ は有限集合であり、P_τ は点、$A_k^{(\sigma)}$ は $\dim_{\mathbb{C}} A_k^{(\sigma)} = 1$ の既約成分、$\{\bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)}\}$ は連結集合、$\{\bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)}\} \cap \{\bigcup_{k \in \Lambda_{\sigma'}} A_k^{(\sigma')}\} = \phi$ ($\sigma \neq \sigma'$ のとき) ▨

この補題の中の記号を使うと、次のような定理が成り立つ。

$\boxed{\text{定理3 (定理βの一般化)}}$

$p_j : D \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y_1, \cdots, y_n) \longrightarrow y_j$ とおく。

次の3条件を仮定する。

(C1), (C2) 上の補題の条件と同一

(C3) 任意の σ, k について, $A_k^{(\sigma)} \not\subset S$

(ただし, $S_i = \{(A_n)_i$ の特異点$\} \subset \mathcal{S}_i$ に対し, $S = \bigcup_{i=1}^{m} \theta_i^{-1}(S_i)$ とおいた。定義4と比べよ。)

Φを(E_n)の解とし，そのRiemann面を$\mathcal{R}$とする。Φが$x=a$上特異点ωを持ち，集積値集合がS_ωであるとすると次のことが成り立つ。

(I) $\exists\sigma,\ \exists\Gamma_\sigma\subset\Lambda_\sigma$ s.t. $\{a\}\times S_\omega=\bigcup_{k\in\Gamma_\sigma}A_k^{(\sigma)}$

（i.e. $\{a\}\times S_\omega$ は有限個の代数曲線の和集合である）

(II) （Picard型の性質）

$X=D\times M$ 上の atlas $(\mathcal{U}_i,\theta_i)$ で次の条件を満たすものを考える。

$$
(C\ast)\begin{cases}(1) & \exists\text{解析的集合 } A_i\subset X \quad \text{s.t. } \mathcal{U}_i=X-A_i\\ (2) & \theta_i(\mathcal{U}_i)=D\times\mathbb{C}^n\\ (3) & \{a\}\times S_\omega\cap\mathcal{U}_i\neq\phi\end{cases}
$$

もし，ある j に対し，

$$
p_j\circ\theta_i(\{a\}\times S_\omega\cap\mathcal{U}_i)=\bigcup_{k\in\Gamma_\sigma}p_j\cdot\theta_i(A_k^{(\sigma)}\cap\mathcal{U}_i)
$$

が無限集合ならば，

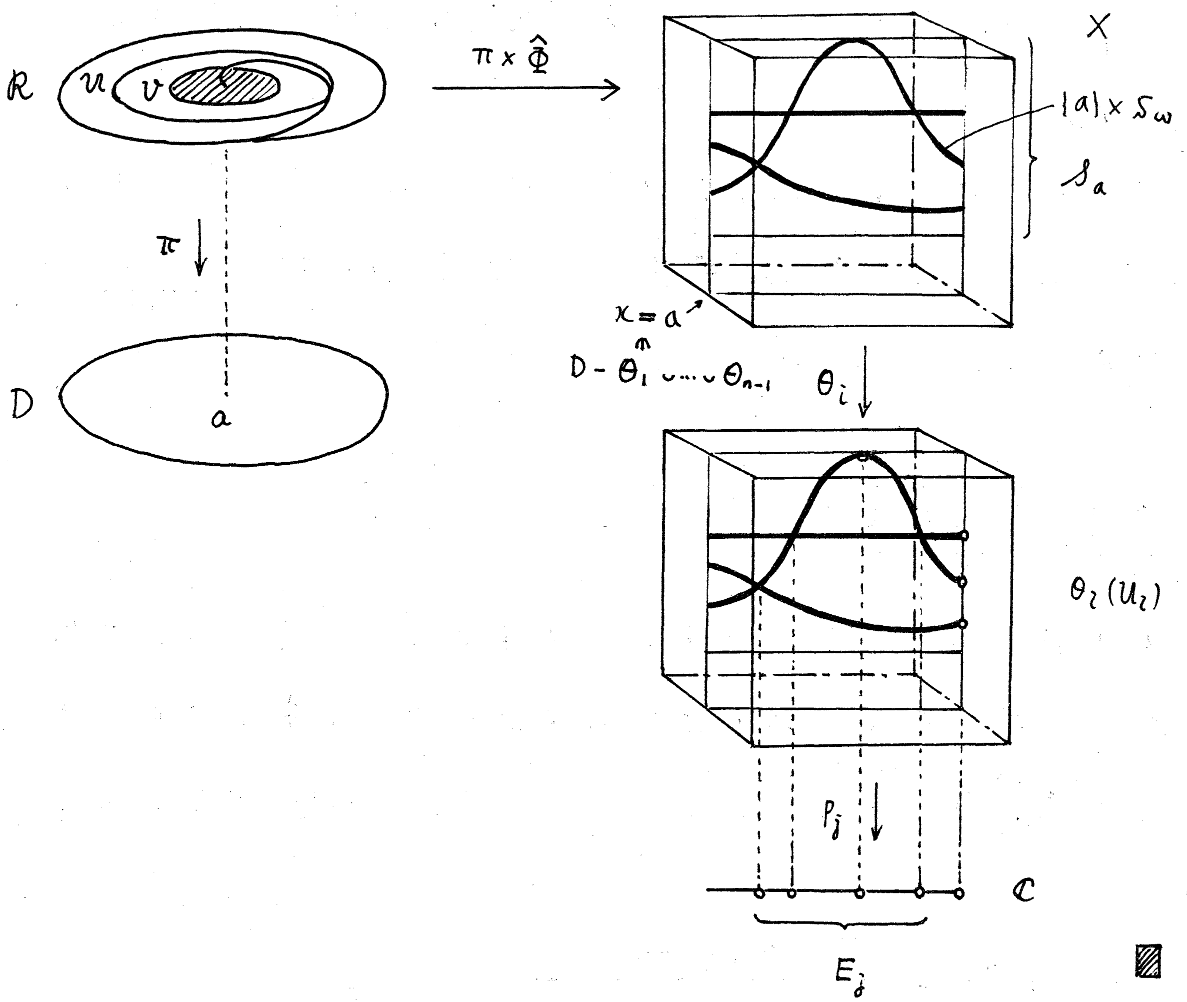
(i) $E_j=\mathbb{C}-\bigcup_{k\in I_\sigma}p_j(\theta_i(A_k^{(\sigma)}\cap\mathcal{U}_i)-S_i)$ は有限集合

ただし，

$I_\sigma=\{k\in\Gamma_\sigma \mid p_j\cdot\theta_i(A_k^{(\sigma)}\cap\mathcal{U}_i)$ は無限集合$\}$

(ii) ω の任意の近傍 $\mathcal{V}\subset\mathcal{R}$ に対し，$\exists$開集合 $V\subset\mathcal{V}$ s.t. $(\pi\times\hat{\Phi})(V)\subset\mathcal{U}_i$

$p_j\circ\theta_i\circ(\pi\times\hat{\Phi})$ は V 上 $\mathbb{C}-E_j$ のすべての値をとる。



この定理は(E_1)に対する定理βの一般化となっている。実際，条件(C1),(C2),(C3)は常に成り立ち，$X = D \times \mathbb{P}^1$だから，X上のchartは(C4)を満たす。そして，(I),(II)を(E_1)の場合に則して読むと，定理βになっていることがわかる([7] CLAIM 1参照)。

また定理3は仮定が(C1)から(C4)までであるが，一番強い制限は(C1),(C2)である。これは，S_aの既約成分が1次元以下であることを保証するための仮定である。そこで，

$\boxed{\text{問題}}$ (C1), (C2) をはずせ。またはもっと弱い条件に置きかえよ。

(C3) はもっと弱い条件に置き換えられることがわかっており ([7] 主定理1の後の Remark 参照), (C4) は $M = \mathbb{P}^n$, $\underbrace{\mathbb{P} \times \cdots \times \mathbb{P}}_{n}$ ならば成り立つことである。

§3. 2連立系の場合

前節で述べたことを2連立系で具体的に見てみよう。一般論では $\mathcal{I}$ の既約成分を計算せずに済んだが，今度はそれを具体的に計算しなくてはいけない。そして，それがかなり大変である。

$$(E_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y,z)}{F(x,y,z)\,Q(x,y,z)} \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{V(x,y,z)}{F(x,y,z)\,W(x,y,z)} \end{cases}$$

$$P, Q, V, W, F \in \mathcal{O}_D[y, z]$$
$$(P, FQ) = 1, \quad (V, FW) = 1, \quad (Q, W) = 1$$

まず (E_2) の定義多様体について注意しておこう。小平 [4] と Morrow [5] により，$\mathbb{C}^2$ のコンパクト化は有理曲面であることが示された。よって，$\mathbb{C}^2$ の有理的コンパクト化Mはコンパクト化Mと同一になる。また，有理曲面の相対極小モデルは

$\Sigma^{(k)}$ (Hirzebruch 曲面, $k=0, 2, 3, \cdots$) と $\mathbb{P}^2$ であり, M はこれらの有限回の blow up で得られる。よって, M の atlas $\{(U_i, \kappa_i)\}_{i=1}^{m}$ は定義2の条件2 (1), (2) 以外に

(3) $\kappa_i(U_i) = \mathbb{C}^2 \quad (i=1, \cdots, m)$

も満たすように取ることができる。

(E_2) の特異初期点集合 $\mathcal{S} \subset X = D \times M$ の既約分解を求めるために, $\theta_i(\mathcal{S} \cap U_i) = \mathcal{S}_i$ の $\theta_i(U_i) = D \times \kappa_i(U_i) = D \times \mathbb{C}^2$ での既約分解を求めよう。(E_2) の $\theta_i(U_i)$ への拡張を

$$
(E_2)_i \quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{P_i(x, y_i, z_i)}{F_i(x, y_i, z_i)\, Q_i(x, y_i, z_i)} \\[2ex] \dfrac{dz_i}{dx} = \dfrac{V_i(x, y_i, z_i)}{F_i(x, y_i, z_i)\, W_i(x, y_i, z_i)} \end{cases}
$$

とする。ただし, $P_i \sim F_i$ 等の多項式の満たすべき条件は (E_2) と同様である。また,

$$
F_i = e_i(x) \prod_{\alpha=1}^{k} f_i^{(\alpha)}(x, y_i) \prod_{\beta=1}^{k'} g_i^{(\beta)}(x, z_i) \prod_{\gamma=1}^{k''} h_i^{(\gamma)}(x, y_i, z_i)
$$

と既約分解しておく。すると,

$\boxed{\text{定理4}}$ ([6], 3.1 参照)

$\mathcal{S}_i\ (\subset D \times \mathbb{C}^2)$ は次表の8種類の解析的集合からなり, それぞれを更に既約分解すると, 図のような9種類の既約成分が

現れる。

S_i をなす解析的集合	既約成分の型				
$\{P_i = Q_i = 0\}$, $\{V_i = W_i = 0\}$ $\{Q_i = W_i = 0\}$		V2-a, V2-y V2-z			C2
$\{F_i = P_i = V_i = 0\}$		V2-a, V2-y V2-z	V3		C2
$\{(a, c_i) \mid Q_i(a\ y_i\ c_i) \equiv 0\} \times \mathbb{C}$	V1	V2-y		C1-y	
$\{(a, b_i) \mid W_i(a\ b_i\ z_i) \equiv 0\} \times \mathbb{C}$	V1	V2-z		C1-z	
$\{a \mid e_i(a) = 0\} \times \mathbb{C}^2$	V1				
$\{(a\ b_i) \mid f_i^{(\nu)}(a\ b_i) = 0,$ $P_i(a\ b_i\ z_i) \equiv 0\} \times \mathbb{C}$		V2-z			
$\{(a, c_i) \mid g_i^{(\nu)}(a\ c_i) = 0,$ $V_i(a\ y_i\ c_i) \equiv 0\} \times \mathbb{C}$		V2-y			
$H_i^{(\nu)}$		V2-a, V2-y V2-z	V3	C1-a	C2

ただし，

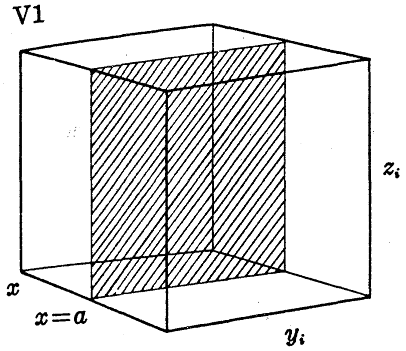
$H_i^{(\nu)} = \{(a, b_i, c_i) \mid$ $t = 0$ の近傍で定義された正則函数 $y_i(t)$, $z_i(t)$ があり，次の条件を満たす。

(1) $y_i(0) = b_i, \quad z_i(0) = c_i$

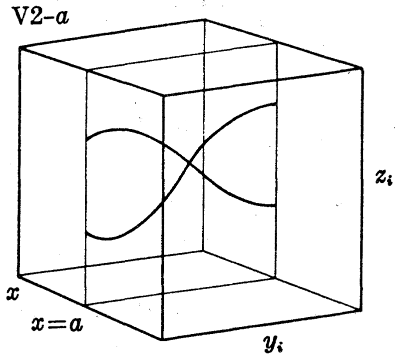
(2) $h_i^{(\nu)}(a,\ y_i(t),\ z_i(t)) \equiv 0$

(3) $\left\{ \begin{aligned} \frac{d\,y_i(t)}{dt} &= P_i W_i\,(a,\ y_i(t),\ z_i(t)) \\ \frac{d\,z_i(t)}{dt} &= Q_i V_i\,(a,\ y_i(t),\ z_i(t)) \end{aligned} \right.$ $\}$

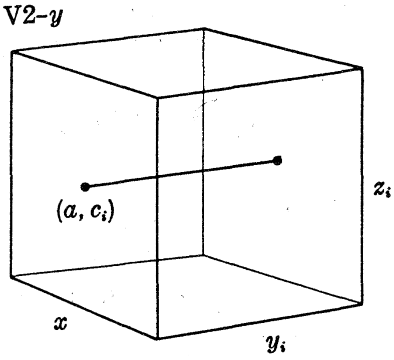
V1



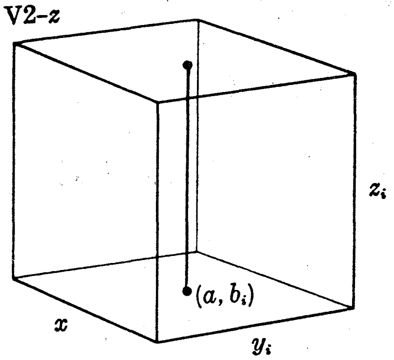
V2-a



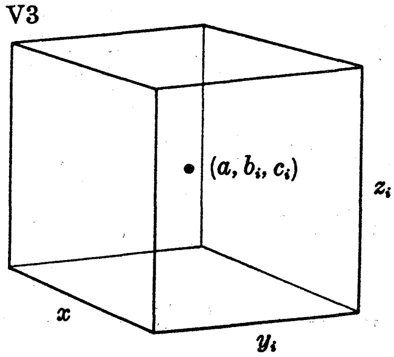
V2-y



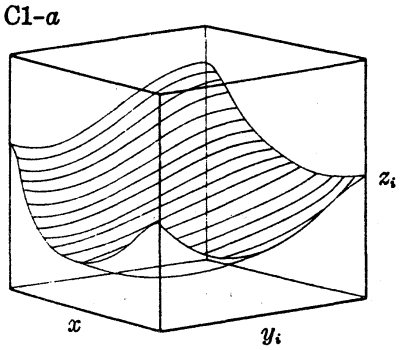
V2-z



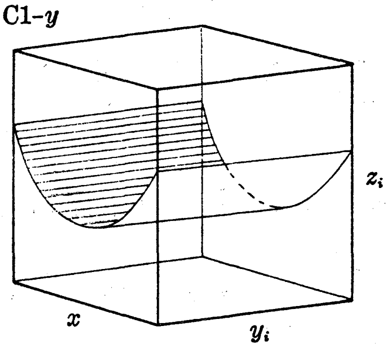
V3



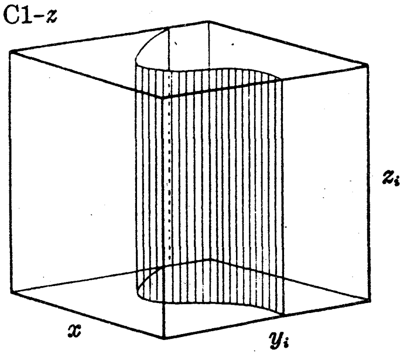
C1-a



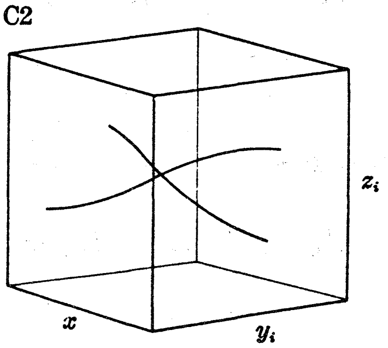
C1-y



C1-z



C2



§4 数式処理システムへの期待

手元に REDUCE 3.3 があるので，いずれ次のような簡単なプログラムを作ってみたいと思う。

P1. (E_2) の形と M の座標変換から $\{(E_2)_i\}_{i=1}^{m}$ を求める。

P2. $(E_2)_i$ に対し，S_i を構成する既約成分の表示式をすべて求める。

また，§0 で述べた $\boxed{\text{問題2}}$ と関連して，

P3. (E_n) が与えられたとき，それが動く特異点を持つか持たないか判定するプログラム

を作ってみたいとも思う。もっとも，そのためには，$\boxed{\text{問題2}}$ に関する理論の大発展が必要であるが。

参考文献

[1] Hukuhara, M., Kimura, T., Matuda, T., Équations Différentielles Ordinaires du Premier Ordre dans le Champ Complexe, Publications of the Math. Soc. of Japan, 7, 1961.

[2] Kimura, T., Sur les généralization d'un théorème de Malmquist, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 2 (1953), 47 - 53.

[3] Kimura, T., Sur les points singuliers essentiel mobiles

des équations différentielles du second order, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 5 (1956), 81–94.

[4] Kodaira, K., Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Differential Geom. 6 (1971), 33–46.

[5] Morrow, J. A., Minimal normal compactifications of $\mathbb{C}^2$, Rice Univ. Stud. 59 (1973), 97–112.

[6] Murata, Y., On fixed and movable singularities of systems of rational differential equations of order n, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 35, no. 2 (1988), 439–506.

[7] Murata, Y., The Picard type theorem for essential singularities of solutions of systems of n rational differential equations, J. Differential Eq., to appear

[8] 村田嘉弘, 非線形常微分方程式の特異点の定性的理論, 京大数理研講究録「複素解析と大域解析 ― 微分方程式の視点から ―, 1988年11月」.

[9] Painlevé, P., Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles, professées à Stockholm, Œuvres de Paul Painlevé, t. III, Centre national de la recherche scientifique, France, 1975.